**Zusammenfassung**

Der Artikel bietet Anregungen zur Lehrplaneinheit 2 (Beweistechniken). Konkret sollen drei wesentliche Fähigkeiten trainiert werden:

1. Das Anstellen einer Vermutung hinsichtlich Korrektheit einer Aussage

und darauf aufbauend das Formulieren eigener Vermutungen.

1. Die Präzisierung oder Nachbesserung einer derartigen Vermutung,

insbesondere mittels eines Beweisversuches.

1. Der mathematisch korrekte Nachweis einer allgemeinen Behauptung

oder deren Widerlegung durch ein Gegenbeispiel.

Es geht nicht darum, mehrere Standard-Beweistechniken kennen zu lernen und schon gar nicht um möglichst kreatives Beweisen. Der Nachweis der Behauptungen geschieht vielmehr im Wesentlichen durch „Nachrechnen“ und wird primär als Handwerkszeug benutzt. Aber auch das will gelernt – und geübt! – sein. Kreativität ist dafür bei den ersten beiden Punkten gefordert. Die Symmetrie von Funktionen eignet sich für diese Zwecke gut. Der Nachweis von Symmetrie ist einfach, ziemlich bekannt und leicht verständlich. Trotzdem wird oft das Ausprobieren an einzelnen Stellen fälschlich als Beweis angesehen. Deshalb kann am Beispiel symmetrischer Funktionen gut erläutert werden, wann ein echter Beweis nötig ist und was diesen ausmacht und wann ein einziges Gegenbeispiel genügt. Die ausgewählten Aufgaben können leicht reduziert oder aber ergänzt werden. Die beispielhaft gezeigte Einheit kann also sehr gut auf einen vorgegebenen Zeitrahmen skaliert werden. Die Darreichung geschieht als Lückentext, bei der ich an eine Verwendung als Arbeitsblatt denke. Auch andere Verwendungen, etwa als Grundlage für eine GFS, sind möglich.

**Symmetrische Funktionen**

Der Einfachheit halber werden nur überall definierte Funktionen betrachtet.

**Definition 1.1.** Eine derartige Funktion f : ℝ →ℝ heißt ...

* ... gerade wenn f(−x) = f(x) für beliebige x ∈ℝ.
* ... ungerade wenn f(−x) = −f(x) für beliebige x ∈ℝ .

Das Schaubild zeigt (in rot) eine gerade Funktion g und (in blau) eine ungerade Funktion u. Die Graphen gerader Funktionen y = f(x) sind symmetrisch zur y-Achse. Die Graphen ungerader Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.



Dass g tatsächlich gerade und u ungerade ist, kann bewiesen werden.

*Beweis.* Es ist nämlich für alle x ∈ℝ

g(−x) = = g(x)

u(−x) =

Natürlich reicht es nicht aus, die jeweilige Bedingung (f(−x) = f(x) bei geraden bzw.

f(−x) = −f(x) bei ungeraden Funktionen) an einer einzelnen Stelle zu prüfen. Die Bedingung muss an allen Stellen gelten. Das kann für allgemeine Funktionen niemals durch einzelne Überprüfungen – und seien es noch so viele – sicher gestellt werden.

**Symmetrische Polynome**

Bei speziellen Funktionen kann aber die Überprüfung der Bedingung an endlich vielen Stellen ausreichend sein. Das gilt insbesondere bei Polynomen.

**Definition 2.1.** Eine Funktion f : ℝ →ℝ mit

f(x) = anxn + an−1xn−1 + . . . + a1x + a0

wobei n ∈ ℕ; a0, a1, . . . ...an ∈ℝ heißt (reelles) **Polynom**.

Die Zahlen ai heißen **Koeffizienten** des Polynoms. Ist , so heißt n der Grad des Polynoms, der höchste von Null verschiedene Koeffizient legt also den **Grad** fest.

Sind alle Koeffizienten Null, so ist f das **Nullpolynom**. Es hat keinen festgelegten Grad. (Alternativ kann man den Grad des Nullpolynoms als −1 definieren.)

**Polynome vom Grad 2**

Ein Polynom f vom Grad 2 hat stets die Form f(x) = a2x2 + a1x + a0 mit a2 6= 0. Für a2 = 0 ist der Grad kleiner als 2.

**Satz 2.1.** Ein Polynom f vom Grad ≤ 2 mit f(−x1) = f(x1) an einer

einzigen Stelle muss gerade sein.

Beweis. Die Berechnung

0 = f(−x1) − f(x1) =

= [a2(−x1)2 + a1(−x1) + a0] − [a2x12+ a1x1 + a0] =

= [a2x12− a1x1 + a0] − [a2x12+ a1x1 + a0] = −2a1x1

führt zu a1x1 = 0. Wegen x1 ≠ 0 muss also a1 = 0 sein. Das Polynom lautet folglich f(x) = a2x2 +a0. Diese Funktion ist aber gerade. Für alle x ∈ℝ ist

f(−x) = a2(−x)2 + a0 = a2x2 + a0 = f(x)

**Aufgabe 2.1**. Muss ein Polynom f vom Grad ≤ 2 mit f(−x1) = −f(x1)

an einer einzigen Stelle x1 ≠ 0 ungerade sein? Versuchen Sie den Beweis des vorangegangenen Satzes zu übertragen. Was vermuten Sie? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Um zu zeigen, dass eine allgemeine Regel nicht richtig ist, genügt also die Angabe eines einzigen **Gegenbeispiels.**

**Überprüfung an zwei Stellen**

Um sicher zu sein, dass ein Polynom vom Grad ≤ 2 ungerade ist, muss die Bedingung

f(−x) = −f(x) an zwei „verschiedenen“ Stellen überprüft werden.

**Aufgabe 2.2**. Das klappt dafür auch noch bei einem Polynom dritten Grades   
f(x) = a3x3 +a2x2 +a1x+a0. Zeigen Sie das. Versuchen Sie dabei, den Begriff „verschiedene“ Stellen zu präzisieren. Vervollständigen Sie dann den entsprechenden mathematischen Satz.

**Satz 2.2.** Ein Polynom f vom Grad ≤ 3 ist ungerade, wenn f(−x1) = −f(x1) und f(−x2) = −f(x2) an zwei Stellen x1 und x2 mit

**Aufgabe 2.3.** Welche Schlussfolgerungen sind möglich, wenn f(−x) = f(x)

an zwei „verschiedenen“ Stellen gilt? Für welchen Polynom-Grad ist eine Aussage möglich? Formulieren und beweisen Sie den entsprechenden mathematischen Satz.

**Satz 2.3.**

Bei der Bedingung f(−x) = f(x) für gerade Funktionen machen natürlich

– wie schon bei Polynomen zweiten Grades – nur von 0 verschiedene Stellen

einen Sinn.

Beweis.

**Rationale Polynome**

Bei jedem Polynom reicht die Überprüfung der Symmetrie-Bedingung an endlich vielen Stellen aus. Je höher aber der Grad des Polynoms ist, desto mehr Stellen werden benötigt.

Ein rationales Polynom, also ein Polynom

f(x) = anxn + an−1xn−1 + . . . + a1x + a0

bei dem alle Koeffizienten a­i (0 ≤ i ≤ n) rational sind, scheint hierbei zunächst keine Sonderrolle zu spielen. Seit Mitte des 19-ten Jahrhunderts weiß man aber, dass viele reellen Zahlen nicht als Nullstellen von rationalen Polynomen auftreten können. (Das Nullpolynom muss dabei natürlich ausgenommen werden.) Zu diesen Zahlen, die man **transzendent** nennt,

gehören π und e.

**Aufgabe 2.4.** Eine Zahl, die Nullstelle eines rationalen Polynoms vom Grad n ≥ 1 sein kann, heißt algebraisch. Zeigen Sie, dass und alle rationalen Zahlen algebraisch sind.

**Aufgabe 2.5.** Wie können Sie mit möglichst wenigen Funktionsauswertungen überprüfen, ob ein rationales Polynom f symmetrisch (gerade oder ungerade) ist? Begründen Sie Ihre Aussage.

**Weitere Erkenntnisse**

In den vorangegangenen Abschnitten haben Sie sicher weitere, noch nicht als Satz formulierte Erkenntnisse über Polynome und ihre Symmetrie-Eigenschaften gewonnen. Insbesondere werden Sie vielleicht eine Vermutung haben, wie man bei einem Polynom, das in ausmultiplizierter Standardform

f(x) = anxn + an−1xn-1 + . . . + a1x + a0

vorliegt, am einfachsten erkennt, ob es symmetrisch ist.

**Aufgabe 2.6.** Versuchen Sie, die Aussagen der vorigen Abschnitte zu verallgemeinern oder neue Kriterien für die Symmetrie von Polynomen zu finden. Überlegen Sie jeweils, ob Sie in der Lage waren, die Vermutung zu beweisen.

**Lösungen**

**Zusammenfassung**

Der Artikel bietet Anregungen zur Lehrplaneinheit 2 (Beweistechniken). Konkret sollen drei wesentliche Fähigkeiten trainiert werden:

1. Das Anstellen einer Vermutung hinsichtlich Korrektheit einer Aussage

und darauf aufbauend das Formulieren eigener Vermutungen.

1. Die Präzisierung oder Nachbesserung einer derartigen Vermutung,

insbesondere mittels eines Beweisversuches.

1. Der mathematisch korrekte Nachweis einer allgemeinen Behauptung

oder deren Widerlegung durch ein Gegenbeispiel.

Es geht nicht darum, mehrere Standard-Beweistechniken kennen zu lernen und schon gar nicht um möglichst kreatives Beweisen. Der Nachweis der Behauptungen geschieht vielmehr im Wesentlichen durch „Nachrechnen“ und wird primär als Handwerkszeug benutzt. Aber auch das will gelernt – und geübt! – sein. Kreativität ist dafür bei den ersten beiden Punkten gefordert. Die Symmetrie von Funktionen eignet sich für diese Zwecke gut. Der Nachweis von Symmetrie ist einfach, ziemlich bekannt und leicht verständlich. Trotzdem wird oft das Ausprobieren an einzelnen Stellen fälschlich als Beweis angesehen. Deshalb kann am Beispiel symmetrischer Funktionen gut erläutert werden, wann ein echter Beweis nötig ist und was diesen ausmacht und wann ein einziges Gegenbeispiel genügt. Die ausgewählten Aufgaben können leicht reduziert oder aber ergänzt werden. Die beispielhaft gezeigte Einheit kann also sehr gut auf einen vorgegebenen Zeitrahmen skaliert werden. Die Darreichung geschieht als Lückentext, bei der ich an eine Verwendung als Arbeitsblatt denke. Auch andere Verwendungen, etwa als Grundlage für eine GFS, sind möglich.

**Symmetrische Funktionen**

Der Einfachheit halber werden nur überall definierte Funktionen betrachtet.

**Definition 1.1.** Eine derartige Funktion f : ℝ →ℝ heißt ...

* ... gerade wenn f(−x) = f(x) für beliebige x ∈ℝ.
* ... ungerade wenn f(−x) = −f(x) für beliebige x ∈ℝ .

Das Schaubild zeigt (in rot) eine gerade Funktion g und (in blau) eine ungerade Funktion u. Die Graphen gerader Funktionen y = f(x) sind symmetrisch zur y-Achse. Die Graphen ungerader Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.



Dass g tatsächlich gerade und u ungerade ist, kann bewiesen werden.

*Beweis.* Es ist nämlich für alle x ∈ℝ

g(−x) = (−x)2 − 2 = x2 − 2 = = g(x)

u(−x) = (−x)3 − 3(−x) = −x3 + 3x = −(x3 − 3x) = −u(x)

Natürlich reicht es nicht aus, die jeweilige Bedingung (f(−x) = f(x) bei

geraden bzw. f(−x) = −f(x) bei ungeraden Funktionen) an einer einzelnen

Stelle zu prüfen. Die Bedingung muss an allen Stellen gelten. Das kann für

allgemeine Funktionen niemals durch einzelne Überprüfungen – und seien es

noch so viele – sicher gestellt werden.

**Symmetrische Polynome**

Bei speziellen Funktionen kann aber die Überprüfung der Bedingung an endlich vielen Stellen ausreichend sein. Das gilt insbesondere bei Polynomen.

**Definition 2.1.** Eine Funktion f : ℝ →ℝ mit

f(x) = anxn + an−1xn−1 + . . . + a1x + a0

wobei n ∈ ℕ; a0, a1, . . . ...an ∈ℝ heißt (reelles) **Polynom**.

Die Zahlen ai heißen **Koeffizienten** des Polynoms. Ist , so heißt n der Grad des Polynoms, der höchste von Null verschiedene Koeffizient legt also den **Grad** fest.

Sind alle Koeffizienten Null, so ist f das **Nullpolynom**. Es hat keinen festgelegten Grad. (Alternativ kann man den Grad des Nullpolynoms als −1 definieren.)

**Polynome vom Grad 2**

Ein Polynom f vom Grad 2 hat stets die Form f(x) = a2x2 + a1x + a0 mit a2 6= 0. Für a2 = 0 ist der Grad kleiner als 2.

**Satz 2.1.** Ein Polynom f vom Grad ≤ 2 mit f(−x1) = f(x1) an einer

einzigen Stelle muss gerade sein.

Beweis. Die Berechnung

0 = f(−x1) − f(x1) =

= [a2(−x1)2 + a1(−x1) + a0] − [a2x12+ a1x1 + a0] =

= [a2x12− a1x1 + a0] − [a2x12+ a1x1 + a0] = −2a1x1

führt zu a1x1 = 0. Wegen x1 ≠ 0 muss also a1 = 0 sein. Das Polynom lautet folglich f(x) = a2x2 +a0. Diese Funktion ist aber gerade. Für alle x ∈ℝ ist

f(−x) = a2(−x)2 + a0 = a2x2 + a0 = f(x)

**Aufgabe 2.1**. Muss ein Polynom f vom Grad ≤ 2 mit f(−x1) = −f(x1)

an einer einzigen Stelle x1 ≠ 0 ungerade sein? Versuchen Sie den Beweis des vorangegangenen Satzes zu übertragen. Was vermuten Sie? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Analog zur vorigen Berechnung führt

0 = f(−x1) + f(x1)

= [a2(−x1)2 + a1(−x1) + a0] + [a2x12+ a1x1 + a0]

= [a2x12− a1x1 + a0] + [a2x12+ a1x1 + a0]

= 2 ・ (a2x12+ a0)

zu

a2x12+ a0 = 0

Im Gegensatz zum vorigen Satz enthält diese Gleichung aber noch zwei unbekannte Parameter. Deshalb kann (natürlich) nicht geschlossen werden, dass a2 und a0 beide Null sind.

*Beweis.*

Beispielsweise erfüllt das Polynom zweiten Grades

f(x) = x2 − 1

die Bedingung

f(−1) = −f(1)

ist aber wegen

f(2) = 3 und f(−2) = 3 ≠ −f(2)

nicht ungerade.

Um zu zeigen, dass eine allgemeine Regel nicht richtig ist, genügt also die Angabe eines einzigen **Gegenbeispiels.**

**Überprüfung an zwei Stellen**

Um sicher zu sein, dass ein Polynom vom Grad ≤ 2 ungerade ist, muss die Bedingung

f(−x) = −f(x) an zwei „verschiedenen“ Stellen überprüft werden.

**Aufgabe 2.2**. Das klappt dafür auch noch bei einem Polynom dritten Grades   
f(x) = a3x3 +a2x2 +a1x+a0. Zeigen Sie das. Versuchen Sie dabei, den Begriff „verschiedene“ Stellen zu präzisieren. Vervollständigen Sie dann den entsprechenden mathematischen Satz.

*Beweis*

Es ist also für eine Stelle x1

0 = f(−x1) + f(x1)

= [a3(−x1)3 + a2(−x1)2 + a1(−x1) + a0] + [a3x13 + a2x12 + a1x1 + a0]

= [−a3x13 + a2x12 − a1x1 + a0] + [a3x13 + a2x12 + a1x1 + a0]

= 2 ・ (a2x12 + a0)

Es ist demnach

a2x12 + a0 = 0

Für die zweite Stelle x2 erhält man entsprechend

a2x22 + a0 = 0

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, dann ergibt sich

0 = [a2x12 + a0] − [a2x22 + a0] = a2[x12 − x22]

Damit die Stellen x1 und x2 „wirklich verschieden“ sind, darf auch nicht x1 = −x2 gelten. Sonst wären die Bedingungen f(−x1) = −f(x1) und f(−x2) = −f(x2) nämlich identisch.

Wenn aber |x1| ≠ |x2|, dann ist x12 − x22 ≠ 0. Deshalb muss a2 = 0 sein.

Eingesetzt in die erste Gleichung a2x12 + a0 = 0 (oder in die zweite) folgt dann a0 = 0. Das Polynom reduziert sich auf

f(x) = a3x3 + a1x

Wegen

f(−x) = a3(−x)3 + a1(−x) = −a3x3 − a1x = −f(x)

für alle x ∈ℝ ist f ungerade.

**Satz 2.2.** Ein Polynom f vom Grad ≤ 3 ist ungerade, wenn f(−x1) = −f(x1) und f(−x2) = −f(x2) an zwei Stellen x1 und x2 mit

|x1| ≠ |x2|.

**Aufgabe 2.3.** Welche Schlussfolgerungen sind möglich, wenn f(−x) = f(x)

an zwei „verschiedenen“ Stellen gilt? Für welchen Polynom-Grad ist eine Aussage möglich? Formulieren und beweisen Sie den entsprechenden mathematischen Satz.

**Satz 2.3.**

Ein Polynom f vom Grad ≤ 4 mit f(−x1) = f(x1) und f(−x2) = f(x2) an

zwei Stellen 0 < x1 < x2 ist gerade.

Bei der Bedingung f(−x) = f(x) für gerade Funktionen machen natürlich

– wie schon bei Polynomen zweiten Grades – nur von 0 verschiedene Stellen

einen Sinn.

*Beweis*

f(x) = a4x4 + a3x3 + a2x2 + a1x + a0

Für eine Stelle x1 ist

0 = f(−x1) − f(x1)

= [a4(−x1)4 + a3(−x1)3 + a2(−x1)2 + a1(−x1) + a0]

−[a4x14 + a3x13 + a2x12 + a1x1 + a0]

= [a4x14 − a3x13 + a2x12 − a1x1 + a0] − [a4x14 + a3x13 + a2x12 + a1x1 + a0]

= −2 ・ (a3x13 + a1x1)

= −2x1 ・ (a3x12 + a1)

Wegen x1 ≠ 0 ist demnach

a3x12 + a1 = 0

Für die zweite Stelle x2 erhält man entsprechend

a3x22 + a1 = 0

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, dann ergibt sich

0 = [a3x12 + a1] − [a3x22 + a1] = a3[x12 − x22]

Wegen 0 < x1 < x2 ist x12 − x22 ≠0. Deshalb muss a3 = 0 sein. Eingesetzt

in die erste Gleichung a3x12 + a1 = 0 (oder in die zweite) folgt dann a1 = 0.

Das Polynom reduziert sich auf

f(x) = a4x4 + a2x2

Wegen

f(−x) = a4(−x)4 + a2(−x)2 = a4x4 − a2x2 = f(x)

für alle x ∈ R ist f gerade.

**Rationale Polynome**

Bei jedem Polynom reicht die Überprüfung der Symmetrie-Bedingung an endlich vielen Stellen aus. Je höher aber der Grad des Polynoms ist, desto mehr Stellen werden benötigt.

Ein rationales Polynom, also ein Polynom

f(x) = anxn + an−1xn−1 + . . . + a1x + a0

bei dem alle Koeffizienten ai (0 ≤ i ≤ n) rational sind, scheint hierbei zunächst keine Sonderrolle zu spielen. Seit Mitte des 19-ten Jahrhunderts weiß man aber, dass viele reellen Zahlen nicht als Nullstellen von rationalen Polynomen auftreten können. (Das Nullpolynom muss dabei natürlich ausgenommen werden.) Zu diesen Zahlen, die man **transzendent** nennt,

gehören π und e.

**Aufgabe 2.4.** Eine Zahl, die Nullstelle eines rationalen Polynoms vom Grad n ≥ 1 sein kann, heißt algebraisch. Zeigen Sie, dass und alle rationalen Zahlen algebraisch sind.

*Beweis*

ist Nullstelle des rationalen Polynoms

x3 − 2

1 + ist Nullstelle von

(x − 1)2 − 7

Eine Zahl q ∈ Q ist Nullstelle von

x – q

**Aufgabe 2.5.** Wie können Sie mit möglichst wenigen Funktionsauswertungen überprüfen, ob ein rationales Polynom f symmetrisch (gerade oder ungerade) ist? Begründen Sie Ihre Aussage.

Es genügt, für eine beliebige transzendente Zahl x1 (etwa x1 = π) f(x1) und f(−x1) zu bestimmen.

Ist f(−x1) = f(x1), dann ist f gerade.

Ist f(−x1) = −f(x1), dann ist f ungerade.

Ansonsten ist das rationale Polynom nicht symmetrisch.

*Beweis.*

Es ist

f(−x1) = a0 + a1(−x1) + a2(−x1)2 + . . . + an(−x1)n

= a0 − a1x1 + a2x12. . . + (−1)nanx1n

f(x1) = a0 + a1x1 + a2x12+ . . . + anx1n

f(−x1) + f(x1) = 2 ・ [a0 + a2x12+ . . . + apx1p]

f(−x1) − f(x1) = −2 ・ [a1x1 + a3x13+ . . . + aqx1q]

wobei p die größte gerade Zahl ≤ n und q die größte ungerade Zahl ≤ n ist.

Für f(−x1) = f(x1) ist

a1x1 + a3x13+ . . . + aqx1q = 0

Weil x1 transzendent ist, müssen alle Koeffizienten 0 sein, denn nur das Nullpolynom hat x1 als Nullstelle.

Damit ist

f(x) = a0 + a2x2 + . . . + apxp

gerade. Entsprechend müssen für f(−x1) = −f(x1) wegen

a0 + a2x22+ . . . + apxp = 0

alle geraden Koeffizienten von f verschwinden.

Dann ist

f(x) = a1x + a3x3 + . . . + aqxq

ungerade. Gilt weder f(−x1) = f(x1) noch f(−x1) = −f(x1), kann f nicht

symmetrisch sein.

**Weitere Erkenntnisse**

In den vorangegangenen Abschnitten haben Sie sicher weitere, noch nicht als Satz formulierte Erkenntnisse über Polynome und ihre Symmetrie-Eigenschaften gewonnen. Insbesondere werden Sie vielleicht eine Vermutung haben, wie man bei einem Polynom, das in ausmultiplizierter Standardform

f(x) = anxn + an−1xn−1 + . . . + a1x + a0

vorliegt, am einfachsten erkennt, ob es symmetrisch ist.

**Aufgabe 2.6.** Versuchen Sie, die Aussagen der vorigen Abschnitte zu verallgemeinern oder neue Kriterien für die Symmetrie von Polynomen zu finden. Überlegen Sie jeweils, ob Sie in der Lage waren, die Vermutung zu beweisen.

Interessante Kriterien für die Symmetrie von Polynomen sind etwa:

• Ein Polynom, bei dem alle ungeraden Koeffizienten a2k−1 verschwinden,

ist gerade.

Das ist leicht direkt nachzuweisen.

• Ein Polynom, bei dem alle geraden Koeffizienten a2k verschwinden, ist

ungerade.

Auch das ist einfach zu beweisen.

• Ein Polynom ist sogar genau dann gerade, wenn (in der Standardform)

nur gerade Hochzahlen auftreten.

Das ist nicht mehr so leicht zu zeigen.

• Entsprechend ist ein Polynom genau dann ungerade, wenn (in der

Standardform) nur ungerade Hochzahlen vorkommen.

Auch das ist nicht so leicht zu beweisen.

• Das Nullpolynom ist die einzige (überall definierte) Funktion, die gerade

und ungerade zugleich ist.

Der Nachweis ist einfach.

• Ein Polynom f(x) vom Grad ≤ 2k (k ∈ℕ) mit f(−x) = f(x) an k

Stellen 0 < x1 < x2 < . . . < xk ist gerade.

Das ist eine Verallgemeinerung der uns schon bekannten Fälle k = 1

und k = 2.

• Ein Polynom f(x) vom Grad ≤ 2k−1 (k ∈ℕ) mit f(−x) = −f(x) an

k Stellen 0 ≤ x1 < x2 < . . . < xk ist ungerade.

Das ist eine Verallgemeinerung des uns schon bekannten Falles k = 2.